

Gödels ontologischer Gottesbeweis

Work-in-Progress-Arbeit
(Bachelorarbeit)

Version 0.12

29.06.2009

Andreas Kirchner <a0600112 at unet.univie.ac.at>



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/at/>

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
1.1. Motivation	3
1.2. Durchgeführte Änderungen an diesem Dokument	4
1.3. Gödels Beweis informell	5
1.3.1. Einleitung	5
1.3.2. Überblick	5
2. Historie und Skizze seines Beweises	7
2.1. Symboltabelle	7
2.2. Geschichte und philosophischer Bezug	8
2.2.1. Der Anselm'sche Gottesbeweis	8
2.2.2. Leibniz	9
2.2.3. Der Möglichkeitsnachweis bei Leibniz	13
2.3. Gödels Beweis	15
2.3.1. Überblick über Axiome und Definitionen	15
2.3.2. Beweis: Positive Eigenschaften sind konsistent	17
2.3.3. Beweis: Göttlich-sein als wesentliche Eigenschaft	19
2.3.4. Beweis des Anselmschen Prinzips	21
2.4. Zur Klassifikation von Gottesbeweisen	23
2.4.1. Abgrenzung zu Gottesbeweisen a priori	25
A. Originalbeweise	26
A.1. Der Originalbeweis - Erste Notiz: „Ontological Proof ca. 1941“	27
A.2. Der Originalbeweis - Zweite Notiz: „Ontologischer Beweis $G(x) =_{Df} x$ “	28
B. Literaturverzeichnis	29

1. Einleitung

1.1. Motivation

Als ich begann, mich dem Themengebiet der Gottesbeweise zu nähern, stellten sich mir einige allgemeine und in Bezug auf Kurt Gödels Beweis auch spezielle Fragen (die Reihenfolge der Fragen intendiert keine Priorität):

1. Was versteht man unter einem ontologischen Gottesbeweis? Gibt es noch andere außer den ontologischen Gottesbeweisen? Wie kann man sie abgrenzen?
2. Welche Gottesbeweise gab es bislang in der Geschichte der Philosophie und Religion? Wie hängen sie zusammen?
3. Wie sieht der Gödel'sche Gottesbeweis informell/inhaltlich aus?
4. Welche Motivationsgründe standen hinter Gödels Bemühungen, sich viele Jahrzehnte lang der Formulierung eines ontologischen Gottesbeweises zu widmen?
5. Wie hängt der Gödel'sche Gottesbeweis inhaltlich mit anderen Gottesbeweisen zusammen?
6. Wie sieht der Gödel'sche Gottesbeweis formal aus? Was sind die Grundlagen, um den formalen Gottesbeweis zu verstehen?
7. Ist der Gödel'sche Gottesbeweis formal korrekt? Unter welchen Voraussetzungen?
8. Ist der Gödel'sche Gottesbeweis plausibel? Welche Einwände gab es bislang auf diesen Beweis?
9. Welchen Wert hat ein plausibler Gottesbeweis für Theologie, Philosophie, Logik und Religion?

Die Fragen steckten den Kontext ab, innerhalb dem Literaturrecherche betrieben wurde. Es stellte sich sehr bald heraus, dass dies ein recht umfangreiches Themenfeld ist, weshalb sich die vorliegende Arbeit vornehmlich auf die Fragen 3-6 einlässt, welche sich hauptsächlich mit Rekonstruktion und Analyse des ontologischen Beweises von Gödel beschäftigen. Die Fragen 7 und 8 mussten, obwohl sie zum spezifischeren Themenkreis gehören, ebenfalls unbearbeitet bleiben.¹ Frage 1 wird überblicksmäßig in Kapitel 2.4 behandelt.

¹Ich hoffe, dies in einer künftigen Masterarbeit nachreichen zu können.

1.2. Durchgeführte Änderungen an diesem Dokument

Datum	Version	Bemerkungen zu den Änderungen
17.03.2009	0.01	Skizze des Leibnizschen Gottesbeweises
28.03.2009	0.02	Erweiterung von 2.2.3 Beginn von 2.3
18.04.2009	0.03	ad Frage1: Thomas' fünf Wege (2.4) Ergänzung der abzuleitenden Sätze (z.Zt. ohne Beweise) in 2.3.1
24.04.2009	0.04	ad Frage1: Thomas-Lektüre und Literaturverweis in 2.4 Sichten des Gödelschen Ontologischen Beweises + Literaturverweis. Korrektur oberflächlicher Aussagen in 2.3 Sichten der Monadologie von Leibniz + Literaturverweis. Modales Argument in der Monadologie (2.2.2)
03.05.2009	0.05	Die 5 Wege von Thomas nach hinten verschoben (2.4) Kapitel über Einwände zu mit Gödel verwandten Gottesbeweisen Lexikon-Eintrag gesichtet; daraufhin (2.2.2) überarbeitet
07.05.2009	0.06	Möglichkeitsnachweis mit Gödels axiomatischen System (2.3.1)
14.05.2009	0.07	Beweis: G ist eine notwendige Eigenschaft (2.3.1) Kommentieren der Originalnotizen Gödels. Hilfe erwünscht ;-) Kleinigkeiten beim Möglichkeitsnachweis (2.2.3) hinzugefügt. A.2
24.05.2009	0.08	Anselm und Vergleich: Leibniz-Anselm Korrolar zu Satz2 (höchstens 1 x mit G). (Abschnitt 2.3.1) Korrektur: $x = _$ ist die Eigenschaft, mit x identisch zu sein. (2.3.1)
31.05.2009	0.09	Ergänzungen zum Möglichkeitsnachweis bei Leibniz (Abschnitt 2.2.3). Anselms Prinzip hergeleitet; alle Sätze hergeleitet. (Abschnitt 2.3.1) Kommentare zu Notiz 1 überarbeitet. Danke für die Hilfe (2.3).
15.06.2009	0.10	Bearbeitung von Notiz1. Strukturierung der Arbeit.
21.06.2009	0.11	Feinschliff. Alle Meta-Anmerkungen entfernt. Eine Einleitung geschrieben, die die Ergebnisse der Arbeit anreißt. (1.3) Gödels Beweis in Abschnitte strukturiert.
29.06.2009	0.12	Endversion. Ergänzungen höchstwahrscheinlich in der Masterarbeit.

1.3. Gödels Beweis informell

1.3.1. Einleitung

Kurt Gödel war ein bedeutender (Meta-)Mathematiker und Logiker des 20. Jahrhunderts. Seine bekanntesten Errungenschaften drehen sich wohl um die Unvollständigkeitssätze. Weniger bekannt ist die Tatsache, dass sich Gödel über lange Zeitspannen hinweg mit der Philosophie von Leibniz und mit Gottesbeweisen beschäftigt hat. Überlegungen dazu hat er zwar nie publiziert, aber in seinem Nachlass fanden sich mindestens zwei in Prädikatenlogik formulierte Gottesbeweise. Ergänzt werden sie durch einige Bemerkungen in seinen Notizbüchern.

In der vorliegenden Arbeit soll diesen Überlegungen nachgegangen werden. Zentral wird das Nachvollziehen des axiomatischen Systems sein, das Gödel formuliert, um darin schlussendlich zu zeigen, dass es notwendigerweise genau ein göttliches Wesen gibt. Der Term notwendigerweise deutet an, dass auch modallogische Axiome, Schlussregeln und Operatoren verwendet werden.

Da die Notizen von Gödel eher spärlich sind, wurden zahlreiche Ergänzungen und Reformulierungen geschrieben, die teilweise andere (teilweise schwächere) Axiome verwenden, oder aber den Axiomen treu bleiben, jedoch Erläuterungen hinzufügen. Zum ersten Mal publiziert wurde eine Version der Gödelschen Gottesbeweise erst posthum, 1987 von Curt Christian in einem Sitzungsbericht der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien. Bei der Erörterung des axiomatischen Systems werde ich mich jedoch auf [Fuhrmann \(2005\)](#) beziehen. Die Originalbeweise mit zusätzlichen Kommentaren sind im Anhang [A](#) zu finden.

1.3.2. Überblick

Als einer der bedeutendsten Logiker überhaupt, nimmt Gödel die Leibnizschen Überlegungen um den ontologischen Gottesbeweis auf und axiomatisiert wesentliche Teile davon. Leibniz war der Ansicht, dass der ontologische Gottesbeweis, der von der Möglichkeit der Existenz Gottes auf seine Notwendigkeit der Existenz schließt, zwar korrekt sei, andererseits müsse man vorher zeigen können, dass Gottes Existenz überhaupt möglich sei. Es könne nämlich der - für Leibniz unwahrscheinliche - Fall eintreten, dass sich der Begriff Gottes als unhaltbar, da widersprüchlich, herausstellt. Deswegen müsse man zeigen, dass alle Eigenschaften Gottes (Perfektionen oder positive Eigenschaften genannt) miteinander vereinbar sind. Leibniz geht dafür auf einfachste Eigenschaften zurück, die keine Negationen in sich enthalten und mit dessen Hilfe man die positiven Eigenschaften durch logische Kombination aufbauen kann. Leider wird dadurch die Problematik nur verschoben, da nicht gezeigt wird, ob solche einfachsten Eigenschaften existieren.

Gödel verzichtet auf einfachste Eigenschaften und definiert ein göttliches Individuum als eines, das alle positiven Eigenschaften besitzt. Es wird zwar keine explizite Definition von positiven Eigenschaften gegeben, jedoch ergibt sich aus den Axiomen, was eine positive Eigenschaft sein könnte - ihre Negation ist beispielsweise keine positive Eigenschaft. Die Eigenschaften 'Göttlich-Sein' und 'Notwendige Existenz' sind als positive Eigenschaften gesetzt. Außerdem: Jede Eigenschaft, die eine positive Eigenschaft notwendig einschließt ist positiv.

Damit weist Gödel die mögliche Existenz Gottes nach und zwar, indem er beweist, dass positive Eigenschaften konsistent sind (das heißt, dass Individuen sie haben können). Er verwendet dafür ein *reductio-ad-absurdum* Argument. Das bedeutet, er zeigt, dass es zu einem Widerspruch kommt, wenn man das Gegenteil (die Inkonsistenz von positiven Eigenschaften) annimmt (Details dazu in Kapitel 2.3).

Nun muss aus der möglichen Existenz von mindestens einem Gott noch die notwendige Existenz von genau einem Gott gefolgert werden. Das geht in folgenden Schritten vor sich:

- Erstens wird das Prädikat G (Göttlich-Sein) als wesentliche Eigenschaft (als Eigenschaft aus denen alle anderen Eigenschaften des Individuums notwendig folgen) definiert.
- Zweitens wird gezeigt, dass alle Individuen mit dem Prädikat G notwendig identisch sind, da selbst die Eigenschaft mit x identisch zu sein, aus G folgt und daher jedes Individuum mit Prädikat G mit x identisch ist.
- Drittens wird Anselms Prinzip (wenn Gott möglicherweise existiert, dann existiert er notwendigerweise) mit Hilfe des starken Becker-Axioms (aus der möglichen Notwendigkeit folgt die Notwendigkeit) gefolgert. Das ist der Kern des ontologischen Gottesbeweises.
- Schlussendlich wird aus Kombination der erzielten Resultate die notwendige Existenz genau eines Wesens gefolgert.

Der Beweis ist freilich kein zwingender Grund dafür, an die Existenz von Gott zu glauben (zu viele hier nicht näher erörterte Einwände können vorgebracht werden, einerseits was die Plausibilität der Axiome, andererseits was die Vergleichbarkeit eines prädikatenlogischen Individuums und eines übersinnlichen Wesens betrifft und schlussendlich was die prinzipielle Möglichkeit betrifft, ein Erkenntnis zu haben über die Existenz von nicht durch die Anschauung gegebenen Entitäten, falls man von Entität überhaupt sprechen darf). Doch er zeigt zumindest, dass der Glaube an die Existenz eines göttlichen Wesens nicht völlig irrational und daher mit wissenschaftlichen und logischen Überlegungen vereinbar ist.

2. Historie und Skizze seines Beweises

Man ist natürlich heute weit davon entfernt, das theologische Weltbild wissenschaftlich begründen zu können, aber ich glaube, schon heute dürfte es möglich sein, rein verstandesmäßig (ohne sich auf den Glauben an irgend eine Religion zu stützen) einzusehen, daß die theologische Weltanschauung, mit allen bekannten Tatsachen [...] durchaus vereinbar ist. Das hat schon vor 250 Jahren der berühmte Philosoph und Mathematiker Leibniz versucht.¹

2.1. Symboltabelle

Die nachstehende Tabelle legt die Bedeutungen der Symbole fest, die in den logischen Ausdrücken verwendet werden:

Symbol	Bedeutung
\exists	Existenzquantor
\forall	Allquantor
\Box	Notwendigkeitsoperator
\Diamond	Möglichkeitsoperator
\rightarrow	materiale Implikation (Aussagenlogik)
\leftrightarrow	Äquivalenz (Aussagenlogik)
\Leftrightarrow	genau dann wenn (gdw)
\neg	Negationsoperator (<i>Nicht</i>)
\vee	Disjunktionsoperator (<i>Oder</i>)
\wedge	Konjunktionsoperator (<i>Und</i>)
\subset	Teilmenge (echte Teilmenge)
\subseteq	Teilmenge (oder gleich mächtig)

¹(Fuhrmann 2005, S.369). Diese Aussage stammt von Gödel aus einem Brief an seine Mutter.

2.2. Geschichte und philosophischer Bezug

Gödel hat sich rund 30 Jahre lang mit Gottesbeweisen beschäftigt.

Aus Oskar Morgensterns Tagebuch weiß man, dass er mit dem Beweis zufrieden war, ihn aber nicht publizieren wollte, weil er befürchtete, dass man ihn dadurch verdächtigen könnte, an Gott zu glauben, obwohl er „doch nur eine logische Untersuchung mache (d.h. zeigt, daß ein solcher Beweis mit klassischen Annahmen (Vollkommenheit, usw.), entsprechend axiomatisiert, möglich sei.“² Das sagt freilich noch nichts über Gödels tatsächlichen religiösen Glauben³, aber das soll uns in Folge nicht primär beschäftigen.

Was jedoch zentral ist, um Gödels Beschäftigung mit dem Gottesbeweis zu verstehen, ist die Tatsache, dass Gödel die Werke von Leibniz gut kannte⁴, natürlich auch seine Überlegungen darüber, die Erkenntnis von Gott auf rein rationalem Wege abzusichern. Da Leibniz nicht der erste in dieser Tradition war, ist es sinnvoll ein wenig auf die Geschichte dieses Typus von Gottesbeweisen einzugehen, die gemeinhin als „ontologische Gottesbeweise“ gehandelt werden.

Die Urheberschaft dieses Typus von Gottesbeweisen wird für gewöhnlich Anselm von Canterbury (1033 - 1109) zugeschrieben. Relativ unbekannt ist jedoch, dass der islamische Philosoph ibn Sīnā (lat.: Avicenna; 980 - 1037) bereits früher einen ontologischen Gottesbeweis formuliert hat.⁵ Im folgenden wird der ontologische Gottesbeweis jedoch mit Bezug auf Anselm entfaltet.

2.2.1. Der Anselm'sche Gottesbeweis

Anselm von Canterbury entfaltet den Beweis im Proslogion⁶. Der Text hat einige charakteristische Eigenschaften, die im Folgenden nur kurz genannt werden können:

- Der Beweis ist in ein Gebet eingebettet und hat teilweise selbst gebetartige Züge.
- Es wird eine fiktive Person mit dem Namen Tor eingeführt, der von Gottes Existenz überzeugt werden soll.
- Es wird eine Unterscheidung von mindestens zwei Realitätsebenen vorgenommen: Dinge können im Verstande oder in der Wirklichkeit (oder in beiden) existieren.

²(Dawson 1997, S.257, Anmerkung 539).

³ „Es scheint [...] unwahrscheinlich, daß er [Gödel, Anmk. A.K.] Bedenken gegen die Berechtigung theologischer Intuition gehabt hätte“ (Dawson 1997, S.142) und „Gödel war, den Zeugnissen anderer nach, religiös, so daß für ihn sein Beweis sicherlich nicht eine logische Spielerei war“ (Essler 1998, S.170).

⁴Nach (Dawson 1997, S.162f) hatten er und Oscar Morgenstern sogar vor, Rechte für die Anfertigung von Mikrofilm-Kopien der Leibniz-Studien zu erwerben. Diese Unternehmung scheiterte jedoch.

⁵Vgl. (Samuelson 2007, S.744).

⁶(Anselm von Canterbury 1962, Vgl. S.85-89)

- Auf der Verstandesebene wird weiter unterschieden, ob das Ding verstanden oder nur gemerkt wird.
- Es wird angenommen, dass jemand, der den Gottesbegriff erläutert bekommt, ihn versteht und akzeptiert⁷.
- Der ausschlaggebende Punkt in der Argumentation ist, dass, sobald akzeptiert wird, dass Gott im Verstande existiert (also gedacht werden kann), Gott auch in der Wirklichkeit existiert⁸. Gibt man das nicht zu, handelt man sich - wenn man alle Voraussetzungen akzeptiert - den logischen Widerspruch ein, dass etwas Größeres gedacht werden kann zu dem, wovon nichts Größeres gedacht werden kann.

2.2.2. Leibniz

Leibniz erkennt den Anselmschen und von Descartes reformulierten Beweis grundsätzlich an, findet aber, dass er ergänzungsbedürftig ist. Die Existenz Gottes wird deshalb bei Leibniz durch zwei Schritte zu beweisen versucht⁹:

1. **Das modale Argument:** Es soll - ähnlich wie bei Anselm - gezeigt werden, dass von der Möglichkeit der Existenz Gottes auf die Notwendigkeit der Existenz Gottes geschlossen werden kann. In modallogischer Schreibweise, wobei G das Prädikat *ist ein göttliches Wesen* meint:
 $\Diamond \exists x Gx \rightarrow \Box \exists x Gx$.
2. **Der Möglichkeitsnachweis:** Es ist möglich, dass ein göttliches Wesen existiert.
 $\Diamond \exists x Gx$.

Die Vorgehensweise von Leibniz unterscheidet sich von der Anselms in zumindest drei Punkten:

- Zunächst einmal besteht der Unterschied darin, dass Leibniz nicht einfach voraussetzt, dass der Begriff Gottes widerspruchsfrei gedacht werden kann. Anselm tut das indem er voraussetzt, dass jemand, der seine Definition von Gott vernimmt, auch versteht. Und durch das Verstehen gehört Gott zu den Dingen, die im Verstande existieren. Leibniz nennt Dinge die im Verstande existieren, Essenzen oder Möglichkeiten. Er thematisiert aber die Frage, ob Gott überhaupt eine Möglichkeit ist. Dies wird explizit im Möglichkeitsnachweis behandelt (siehe Abschnitt 2.2.3).

⁷ „[W]enn dieser Tor eben das hört, was ich sage: 'etwas, über dem nichts Größeres gedacht werden kann', versteht er, was er hört; und was er versteht, ist in seinem Verstande, auch wenn er nicht einsieht, daß dies existiert.“

⁸ „Und sicherlich kann 'das, über dem Größeres nicht gedacht werden kann', nicht im Verstande allein sein. Denn wenn es wenigstens im Verstande allein ist, kann gedacht werden, daß es auch in Wirklichkeit existiere - was größer ist.“

⁹vgl. (Fuhrmann 2005, S. 351-354).

- Dadurch wird auch ein zweiter Unterschied klar: Für Leibniz ist die Unterscheidung zwischen „im Verstand existieren“ und „in Wirklichkeit existieren“ anders akzentuiert: Es geht um das Verhältnis von Möglichkeit und Wirklichkeit, was bei Anselm nicht explizit erwähnt ist.
- In der Detailbetrachtung weiter unten wird sich noch ein dritter Unterschied zeigen: Der Leibnizsche Beweisgang ist nicht wie der von Anselm ausschließlich a priori. Als Einstieg verwendet er den Satz vom zureichenden Grund, um ausgehend von den kontingenten Einzeldingen den Begriff Gottes als vollkommenstes Wesen einsichtig zu machen (siehe Abschnitt 2.2.2).

In den folgenden beiden Abschnitten wird auf die Textstellen genauer eingegangen, in denen Leibniz diese Argumente entwickelt.

Das modale Argument

Leibniz erläutert das oben skizzierte modale Argument in einem Gedankengang, der sich in zwei Schritte aufteilen lässt:

1. **Der Begriff Gott:** Der erste Schritt geht von Überlegungen vom Satz des zureichenden Grundes aus.¹⁰ Weil die Rückfrage nach Begründungen oder Ursachen auf einen unendlichen Regress hinauslaufen würde, muss es etwas geben, das außerhalb dieser Reihe von Begründungen oder Ursachen liegt. Leibniz folgert aus dem Obigen, dass diese Entität, Gott, „einzig, allumfassend und notwendig“ ist,¹¹ also absolut vollkommen¹² Nun ist diese Bestimmung von Gott doch mit Anselms Formulierung „womit verglichen nichts größeres gedacht werden kann“ äquivalent. Er kommt zum Begriff Gottes jedoch erst über die kontingenten Dinge und dem Satz vom zureichenden Grund (weshalb man eine Nähe zu den kosmologischen Gottesbeweisen anführen

¹⁰ „Der zureichende Grund [...] muß sich auch in den kontingenten [...] Tatsachen] finden [...], wo die Rückführung auf besondere Gründe wegen der unermesslichen Vielfalt der Naturdinge und der Teilung der Körper ins Unendliche auf eine endlose Vereinzelnung hinauslaufen könnte.[...] Es muß der zureichende oder letzte Grund außerhalb der Folge [...] der] Vereinzelnung des Kontingenten liegen, wie unendlich sie auch sein mag. [§38] So muß der letzte Grund der Dinge in einer notwendigen Substanz liegen, in der das Besondere der Veränderung nur eminent, wie in einer Quelle enthalten ist, und dies nennen wir Gott.“(Leibniz 1998, S.29ff (§36-38))

¹¹(Leibniz 1998, S.31 (§40)).

¹²Mit Vollkommenheit ist gemeint, dass die Beschränkungen, die einzelne Dinge haben, wegfallen. Übrig bleibt eine allumfassende „positive Realität“ (Leibniz 1998, S.33 (§41)). Gott wird also verständlich gemacht, in dem den Dingen etwas weggenommen wird: Die Beschränktheit. Andererseits erfolgt die Richtung der Begründung genau entgegengesetzt, also von dem notwendigen Wesen zu den kontingenten Dingen: „Es folgt weiterhin, daß die Geschöpfe ihre Vollkommenheit dem Einfluß Gottes verdanken, während sie ihre Unvollkommenheit aus ihrer eigenen Natur haben, die nicht ohne Schranken sein kann.“(Leibniz 1998, S.33 (§42))

kann), während Anselm mit der zu seiner Zeit üblichen Definition von Gott¹³ beginnt und von dort aus versucht, durch Analyse der Definition die Existenz des definierten Individuums zu folgern.

2. **Die Möglichkeit Gottes enthält seine Wirklichkeit:** Nachdem im ersten Schritt erläutert wurde, inwiefern man Gott als Quelle der existierenden Dinge verstehen kann, wird nun das Verhältnis zwischen Gott und den Möglichkeiten verdeutlicht.¹⁴ Für Leibniz muss auch in dieser Beziehung ein Begründungsverhältnis bestehen. Sofern den Möglichkeiten überhaupt irgend eine Realität zugeschrieben werden soll, muss Gott, in dem die Möglichkeiten verankert sind, auch real sein.¹⁵

Im zweiten Schritt wird der zentrale Argumentationsgang von Anselm nachvollzogen, jedoch mit anderen Akzentuierungen: Bei Anselm wird direkt vom Begriff aus argumentiert: Ein Gott, der nur im Gedanken groß ist, entspricht nicht der begrifflichen Forderung, so groß zu sein, dass man sich nichts anderes Größeres denken kann. Ein Gott, der nur im Gedanken ist, ist kein Gott. Leibniz argumentiert differenzierter: Im ersten Schritt zeigt er, dass ausgehend von den kontingenten Dingen aus der Erfahrung und dem Satz des zureichenden Grundes ein notwendiges Wesen gedacht werden muss, das als absoluter Grund für die einzelnen kontingenten Dinge dient. Aus dem ersten Schritt folgen noch keine ontologischen Konsequenzen, es handelt sich erst mal um ein verständlich-machen des Begriffs Gottes, oder anders gesagt, eine Beantwortung der Frage: Was ist das Wesen oder die Essenz Gottes? Im zweiten Schritt wird in Gott die „Region der ewigen Wahrheiten oder Ideen“¹⁶ angelegt, da auch die Essenzen/Möglichkeiten einen Grund brauchen. Wenn Gott jedoch - für uns ebenfalls als Essenz gedacht - selbst nicht wirklich (im ontologischen Sinne) wäre, hätte keine Essenz einen wirklichen Grund. Alles hängt also an dem ontologischen Status der Essenz oder der Möglichkeit Gottes. „Somit hat Gott (oder das notwendige Wesen) allein das Privileg, notwendigerweise zu existieren, wenn er nur möglich ist“¹⁷.

In diesem Text wird jedoch deutlich, dass die Existenz Gottes bei Leibniz nicht nur um ihrer selbst willen bewiesen wird, sondern aus einem Grund, der sich darum dreht, die

¹³ „Weit davon entfernt, die Bedeutung des Wortes „Gott“ willkürlich festzulegen, legt Anselm vielmehr gläubig dar, quod credimus. Die von ihm vorgelegte Definition des Gottesbegriffs - übrigens bereits bekannt in der Stoa - wurde vor ihm in der christlichen Theologie nahezu identisch schon bei Augustin und Boethius verwendet[... Seine Definition] ist somit weit davon entfernt, eine „neue“ Aussage zu sein. Anselm beginnt damit, daß er seine Leser nur daran erinnert, was gemeinhin und in der Regel mit dem Wort „Gott“ gemeint ist.“ (Samuelson 2007, S.727)

¹⁴ Zu dem Bereich der Möglichkeiten gehören alle Dinge, worüber vernünftig nachgedacht wird, denn er nennt im Zusammenhang mit Möglichkeiten immer auch Essenzen oder ewige Wahrheiten.

¹⁵ „[. E]s muß, wenn es eine Realität in den Essenzen oder Möglichkeiten oder in den ewigen Wahrheiten gibt, diese Realität fundiert sein in etwas Existierendem und Wirklichen und folglich in der Existenz des notwendigen Wesens, bei dem die Essenz die Existenz einschließt oder für das es zureicht, möglich zu sein, um wirklich zu sein.“ (Leibniz 1998, S.33ff (§44)) Der Gehalt dieses Paragraphen ist für die moderne quantifizierte Modallogik problematisch geworden ist, weil dadurch die Sinnhaftigkeit der Modaloperatoren an theistische Voraussetzungen gebunden wird.

¹⁶ (Leibniz 1998, S.33 (§43))

¹⁷ (Leibniz 1998, S.35 (§45))

Gedanken¹⁸ in der Wirklichkeit zu fundieren. Die Linie ist:

- Angenommen, wir können Gott widerspruchsfrei denken.
- Wenn wir Gott denken, haben wir einen Gedanken von Gott. Wenn es ein gewöhnlicher Gedanke ist, dann ist es prinzipiell möglich, dass Gott existiert, so wie es möglich ist, dass blaue Vögel existieren.
- Dieser Gedanke ist jedoch ein spezieller Gedanke, der allen anderen Gedanken den Grund legt.
- Wenn Gedanken überhaupt eine Realität, eine Wirklichkeit haben, dann müssen sie diese von irgend woher haben. (Die Argumentation geht analog zum ersten Teil von Schritt 1, wo von den einzelnen, kontingenten Dingen auf etwas Grundlegenderes und Vollkommeneres geschlossen wird).
- Dieser spezielle Gedanke hat einerseits die Eigenschaft, dass wir ihn wie andere Gedanken denken können: wir kommen durch ihn zu dem Begriff eines notwendigen Wesens. Andererseits hat er die umstrittene Spezialität, dass wir durch ihn zu einer Gewissheit kommen, was die Existenz dieses Wesens angeht. Der Inhalt des Gedankens wird nicht nur als möglich, sondern als notwendig eingestuft. Leibniz hat es andernorts - hier spricht er in Bezug auf die Scholastiker und auf Descartes von diesem speziellen Gedanken - so formuliert: „Was aus der Idee oder aus der Definition einer Sache folgt, das kann von der Sache ausgesagt werden. Die Existenz folgt aus der Idee Gottes[...]“¹⁹

Dadurch ist das modale Argument bei Leibniz entfaltet. Durch a priori Überlegungen wurde die Existenz Gottes gezeigt, insofern die Möglichkeit Gottes gegeben ist, wie der zweite Teil von §45 deutlich macht: „[. S]o wie nichts die Möglichkeit dessen hindern kann, was keinerlei Grenzen, keine Negation und folglich keinen Widerspruch einschließt, so reicht dies hin, um die Existenz Gottes *a priori* zu erkennen.“ Der Begriff Gott muss widerspruchsfrei und negationslos sein, was im Möglichkeitsnachweis geklärt wird.

Leibniz weist aber auch noch darauf hin, dass Gottes Existenz auch durch die Erfahrung bewiesen ist, da ja die kontingenten Dinge existieren und gemäß Schritt 1 einen zureichenden Grund brauchen.²⁰

¹⁸oder Möglichkeiten, oder Essenzen oder Ideen - es handelt sich tendenziell um mehrere Namen für ein und dieselbe Sache

¹⁹(Leibniz 1995, S.12)

²⁰„Und da kontingente Wesen existieren, die ihren letzten oder zureichenden Grund nur in dem notwendigen Wesen haben können, das den Grund seiner Existenz in sich selbst hat, haben wir sie zudem *a posteriori* bewiesen.“(Leibniz 1998, S.35 (§45))

2.2.3. Der Möglichkeitsnachweis bei Leibniz

„Wir können Definitionen nicht zum Schließen verwenden, bevor wir wissen, daß sie Realdefinitionen sind oder daß sie keinen Widerspruch enthalten.“²¹

Zum Möglichkeitsnachweis bei Leibniz ist zu sagen, dass der Schlüssel bzw. das Problem der Terminus der positiven Eigenschaften ist. Doch zuvor ein paar Sätze dazu, warum es eines Möglichkeitsnachweises bedarf. Im Alltag sagt man sehr schnell, dass etwas möglich ist. Was ist bei Möglichkeitsurteilen zu beachten? Möglich kann nur etwas sein, was nicht unmöglich ist. **Es ist möglich, dass ich morgen früh aufstehe.** Aber: **Es ist unmöglich, dass ich morgen früh aufstehe und liegen bleibe**, unter der Voraussetzung, dass *liegen bleiben* gleichbedeutend ist mit *nicht aufstehen*. Es ist unmöglich, dass einem Individuum zur selben Zeit²² eine Eigenschaft und die Negation dieser Eigenschaft zukommt. Überträgt man diese Problematik auf die Frage, ob ein göttliches Wesen möglich ist, muss man zeigen können, dass sich die Eigenschaften des göttlichen Wesens nicht widersprechen. Das ist auch der Punkt, an dem Leibniz den ontologischen Beweis Descartes (und Anselms) für ergänzungsbedürftig hält, obwohl er dem Beweisgang zustimmt. Er sagt, dass im Beweis etwas vorausgesetzt ist, nämlich „daß diese Idee eines ganz großen, ganz vollkommenen Wesens möglich ist und keinen Widerspruch einschließt.“²³ Für Leibniz ist es zwar durchaus gerechtfertigt, die Möglichkeit Gottes anzuerkennen, solange niemand das Gegenteil beweisen kann, aber es wäre wünschenswert, den Möglichkeitsnachweis mit „mathematischer Evidenz“ zu führen. Andernorts führt er diesbezüglich die Unterscheidung von Nominaldefinition und Realdefinition ein. Die erste gibt eine Liste von Merkmalen einer Sache an, „um sie von anderen zu unterscheiden“²⁴. Aus der zweiten ergibt sich erst die Möglichkeit einer Sache. Die Möglichkeit einer Sache kann entweder a priori oder a posteriori festgestellt werden. A priori kann man so vorgehen:

- Den Begriff in seine Bestandteile zerlegen
- Den Begriff in kleinere Begriffe zerlegen, von denen man schon weiß, dass sie möglich (also widerspruchsfrei) sind oder von denen man weiß, dass nichts in ihnen ist, was sie untereinander unverträglich machen würde.

A posteriori erkennt man die Möglichkeit einer Sache durch die Gewissheit, dass das Ding existiert oder existiert hat: „[D]enn was wirklich existiert oder existiert hat, ist auf jeden Fall möglich.“²⁵

²¹(Leibniz 1995, S.12)

²²In den üblichen Axiomen der Aussagen- und Prädikatenlogik kommt Zeit nicht vor.

²³(Leibniz 1961, S. 439)

²⁴(Leibniz 1995, S.13)

²⁵(Leibniz 1995, S.14)

Leibniz folgt, wie im ersten Schritt von 2.2.2 gezeigt, der üblichen Definition Gottes, nach denen Gott alle perfekten Eigenschaften (Perfektionen²⁶.) zugewiesen werden. Die Schwierigkeit besteht nun darin zu zeigen, dass die Kombination dieser Eigenschaften keinen Widerspruch verursacht²⁷. Für Leibniz bedeutet das, dass keine der göttlichen Eigenschaften durch eine Negation irgend einer anderen Eigenschaft bestimmt sein darf. Eine Eigenschaft, die diese Forderung erfüllt, heißt *vollkommen positiv*. Wenn man voraussetzt, dass die Verbindung von positiven Eigenschaften wieder positiv ist, kann man die Perfektionen aus vollkommen positiven Eigenschaften aufbauen.

Die brennende Frage ist, ob es positive Eigenschaften gibt und ob man Beispiele angeben kann? Schwarz-sein ist keine positive Eigenschaft, denn ein Individuum, das schwarz ist, ist nicht grün. Ein 10 Kilogramm schweres Individuum ist nicht 20 Kilogramm schwer. Sowohl Schwarz-sein als auch 10-Kilogramm-schwer-sein lassen sich durch eine Negation charakterisieren²⁸. Durch diesen Mangel - Perfektionen sind nicht mangelhaft - entfallen diese Prädikate als Kandidaten für positive Eigenschaften. Es lässt sich leicht einsehen, dass man positive Eigenschaften nicht aus dem Stehgreif nennen kann. Leibniz ging von der Annahme aus, dass man durch Analyse der Eigenschaften einfachste, reine und unzerlegbare Eigenschaften identifizieren kann, welche nicht mehr durch Negationen charakterisiert werden können. Aus diesen Eigenschaften müsse man die Perfektionen aufbauen.

Leibniz macht leider nicht plausibel, warum die einfachsten Eigenschaften positiv sind. Das, was die Möglichkeit eines göttlichen Wesens problematisch macht, wird auf die einfachsten Eigenschaften übertragen. Es wird vorausgesetzt, dass diese Möglichkeit plausibel ist. Aus Leibniz Schriften lässt sich entnehmen, dass er bezüglich der Frage, ob wir einfachste Eigenschaften identifizieren können, selbst nicht klar war: „Ob aber jemals von Menschen eine vollkommene Analyse der Begriffe bis zum *ersten* Möglichen und bis zu den unauflösbaren Begriffen durchführbar ist, ob sie (was dasselbe bedeutet) ihre Gedanken bis zu den absoluten Attributen Gottes selbst, welche die ersten Ursachen und der letzte Grund der Dinge sind, zurückführen können, das möchte ich jetzt nicht zu entscheiden wagen. Meist sind wir damit zufrieden, die Realität gewisser Begriffe durch Erfahrung aufgewiesen zu haben, um sodann aus ihnen, nach dem Vorbild der Natur, andere Begriffe zusammenzusetzen.“²⁹

²⁶Auch Gödel verwendete diesen Ausdruck in seinen Aufzeichnungen

²⁷Was nicht weiter verwundert: Es ist ein a priori Verfahren zur Feststellung der Möglichkeit der Existenz Gottes, um zu entscheiden, ob die Idee wahr ist.

²⁸Wenn es darum geht, Widersprüche garantiert auszuschließen ist irrelevant, dass die Charakterisierung nicht eindeutig ist.

²⁹(Leibniz 1995, S.14)

2.3. Gödels Beweis

Gödel verzichtet in der nun darzustellenden Version auf den Umweg der einfachsten Eigenschaften³⁰ und erstellt sich ein axiomatisches System mit eigens auf den Beweis zugeschnittenen Axiomen. Aus diesen Axiomen sollen das modale Argument und der Möglichkeitsnachweis hergeleitet und damit bewiesen werden. Dieser Beweis ist wie alle Beweise relativ zu dem Axiomensystem, in dem die Sätze bewiesen werden. Die Basis dieses axiomatischen Systems enthält außerdem (1) die Axiome der Prädikatenlogik zweiter Stufe, was bedeutet, dass über Eigenschaften, die auf Individuen angewandt werden, nochmals Eigenschaften ausgesagt werden dürfen. Diese theoretische Einrichtung ist für die Formulierung von positiven Eigenschaften notwendig, welche ja etwas über Eigenschaften und nicht über Individuen sagen. (2) Desweiteren werden modallogische Operatoren, Axiome und Schlussregeln verwendet.

2.3.1. Überblick über Axiome und Definitionen

Im Folgenden eine Auflistung der drei Definitionen und sechs Axiome, die für das axiomatische System spezifisch sind, aus dem der Gottesbeweis hergeleitet wird³¹:

Axiom 1 (Jede Eigenschaft ist entweder positiv oder negativ).

$$P\neg X \rightarrow \neg PX.$$

$$\neg PX \rightarrow P\neg X.$$

Axiom 2 (Was eine positive Eigenschaft notwendig einschließt, ist selbst eine positive Eigenschaft).

$$PX \wedge \Box \forall x (Xx \rightarrow Yx) \rightarrow PY.$$

Definition 1 (Ein Individuum ist göttlich (G), wenn es alle positiven Eigenschaften besitzt).

$$Gx \Leftrightarrow \forall X (PX \rightarrow Xx).$$

Axiom 3 (Göttlich-sein ist eine positive Eigenschaft).

$$PG.$$

³⁰Es ist eine Notiz bekannt, in der Gödel einen zweiten Beweis andeutet, der den zentralen Aspekt der Leibnizschen Überlegungen über einfachste Eigenschaften aufnimmt: „Theorem: Die positiven Eigenschaften sind genau die, welche aus den elementaren durch Anwendung der Operationen $\&$, \vee , \supset gebildet werden können. Vgl. (Gödel und Feferman 1995, S.436).

³¹Die Axiome, Sätze und Definitionen basieren auf Fuhrmann (2005). Die dort angedeuteten Beweise werden im Folgenden expliziert und formalisiert.

Axiom 4 (Positive Eigenschaften sind notwendig positiv).

$$PX \rightarrow \Box PX.$$

Definition 2 (Eine Eigenschaft X ist eine wesentliche Eigenschaft (Ess) eines Individuums x , wenn alle anderen Eigenschaften, die x hat, aus X notwendig folgen).³²

$$X \text{ Ess } x \Leftrightarrow Xx \wedge \forall Y(Yx \rightarrow \Box \forall y(Xy \rightarrow Yy)).$$

Definition 3 (Ein Individuum x existiert notwendig (E), wenn alle wesentlichen Eigenschaften von x mit Notwendigkeit zutreffen).

$$Ex \Leftrightarrow \forall X(X \text{ Ess } x \rightarrow \Box \exists y Xy).$$

Axiom 5 (Notwendige Existenz (E) ist eine positive Eigenschaft).

$$PE.$$

Axiom 6 (Becker-Axiom).

$$\Diamond \Box A \rightarrow \Box A.$$

Das sind die Axiome und Definitionen, aus denen die folgenden Sätze bewiesen werden:

Satz 1 (Positive Eigenschaften sind konsistent in diesem System³³).

$$PX \rightarrow \Diamond \exists x Xx.$$

Korrolar 1 (Es ist möglich, dass mindestens ein Individuum existiert, das göttlich ist).

$$\Diamond \exists x Gx.$$

Satz 2 (Göttlich-sein ist eine wesentliche Eigenschaft eines Individuums).

$$Gx \rightarrow GEssx.$$

Korrolar 2 (Wenn zwei Individuen göttlich sind, dann sind sie notwendigerweise identisch³⁴).

$$Gx \rightarrow \Box \forall y(Gy \rightarrow x = y).$$

³²Das heißt, dass alle wesentlichen Eigenschaften äquivalent sind. Desweiteren frage ich mich, ob diese Definition plausibel ist. Folgen aus den wesentlichen Eigenschaften wirklich alle anderen Eigenschaften? Folgt aus der Tatsache, dass auf x die wesentliche Eigenschaft Decke-sein zutrifft, dass sie rot und aus Baumwolle ist?

³³Es ist möglich, d.h. impliziert keinen logischen Widerspruch, mindestens einen Gegenstand zu instanzieren, der eine positive Eigenschaft hat. Das ist eine direkte Vorbereitung auf den Möglichkeitsnachweis Gottes, wie sich zeigen wird.

³⁴Das heißt: Wenn es einen „Gott“ gibt, gibt es nur einen „Gott“

Satz 3 (Anselms Prinzip: Wenn die Existenz eines Individuums, das göttlich ist, möglich ist, dann ist sie notwendig).

$$\Diamond \exists Gx \rightarrow \Box \exists x Gx.$$

Korrolar 3 (Es ist notwendig, dass mindestens ein Individuum x existiert, das göttlich ist und wenn es mehrere sind, dann sind sie mit x identisch³⁵).

$$\Box \exists x (Gx \wedge \forall y (Gy \rightarrow x = y)).$$

2.3.2. Beweis: Positive Eigenschaften sind konsistent

Satz 1 (Positive Eigenschaften sind konsistent in diesem System³⁶).

$$PX \rightarrow \Diamond \exists x Xx.$$

Bevor man diesen Satz beweisen kann, ist wichtig zu erwähnen, was es bedeutet, dass Eigenschaften konsistent sind. Aus Satz 1 erschließt sich, dass eine Eigenschaft konsistent ist, wenn es möglich ist, dass mindestens ein Individuum diese Eigenschaft hat. Es lässt sich erahnen, dass es dabei um das Vermeiden einer logischen Widersprüchlichkeit geht.³⁷ Der Beweis verwendet das *reductio-ad-absurdum*-Argument. Es wird gezeigt, dass es bezüglich des axiomatischen Systems widersprüchlich ist anzunehmen, dass positive Eigenschaften inkonsistent wären. Darum muss das Gegenteil gelten: Positive Eigenschaften sind konsistent. In der unten stehenden Tabelle 2.3.2 findet sich der Beweis im Detail.

³⁵Es gibt notwendigerweise nur einen „Gott“.

³⁶Es ist möglich, d.h. impliziert keinen logischen Widerspruch, mindestens einen Gegenstand zu instanzieren, der eine positive Eigenschaft hat. Das ist eine direkte Vorbereitung auf den Möglichkeitsnachweis Gottes, wie sich zeigen wird.

³⁷So wie im Zusammenhang mit dem Leibnizschen Möglichkeitsnachweis in Abschnitt 2.2.3 gezeigt, wo Leibniz die Problematik der Konsistenz auf einfachste Eigenschaften verschoben, dann aber nicht wirklich gelöst hat.

2. Historie und Skizze seines Beweises

Nr.	Ausdruck	Kommentar
1	PX	Angenommen, X ist eine positive Eigenschaft P.
2	$PX \rightarrow \neg\Diamond\exists xXx$	Weiter angenommen, X ist nicht konsistent.
3	$\neg\Diamond\exists xXx$	In (2) wurde (1) eingesetzt und Modus Ponens angewendet.
4	$\Box\neg\exists xXx$	Bei (3): Transformiere \Diamond in äquivalenten Ausdruck $\neg\Box\neg$ ¹ und streiche doppelte Negation.
5	$\Box\forall x\neg Xx$	Bei (4): Transformiere $\exists x$ in äquivalenten Ausdruck $\neg\forall x\neg$ ² und streiche doppelte Negation ³ .
6	$\Box\forall x(Xx \rightarrow \neg(x = x))$	$x = _$ ist ein formal nicht ganz korrekter Ausdruck für die Eigenschaft, mit x identisch zu sein. Das ist eine Auflösung des Ausdrucks $\neg Xx$ und als Beispiel für einen Widerspruch zu verstehen, wie im Kommentar von (5) angedeutet. Man vergleiche diesen Ausdruck mit Axiom 2.
7	$PX \wedge \Box\forall x(Xx \rightarrow Yx) \rightarrow PY$	Axiom 2.
8	$PX \wedge \Box\forall x(Xx \rightarrow \neg(x = _)) \rightarrow P\neg(x = _)$	(7), Y substituiert mit $\neg(x = _)$.
9	$P\neg(x = _)$	In (8) wird (1) und (6) eingesetzt und der Modus Ponens angewendet. ⁴
10	$P\neg X \rightarrow \neg PX$	Axiom 1.
11	$\neg P(x = _)$	In (10) wird X substituiert mit $(x = _)$. (9) einsetzen. Modus Ponens.
12	$\Box\forall x(Xx \rightarrow (x = x))$	Es gilt logisch, dass alle Gegenstände mit sich selbst identisch sind.
13	$PX \wedge \Box\forall x(Xx \rightarrow (x = _)) \rightarrow P(x = _)$	Axiom 2, Y substituiert mit $(x = _)$.
14	$P(x = _)$	In (13) wird (1) und (12) eingesetzt und der Modus Ponens angewendet.

¹ Es ist möglich, dass ist äquivalent zu Es ist nicht notwendig, dass nicht.

² Der Ausdruck Es gibt mindestens ein Individuum x für das gilt: ist äquivalent zu Es ist nicht der Fall, dass für alle x nicht gilt:.

³ Der Ausdruck kann informell übersetzt werden in: Es ist notwendig, dass alle Individuen die positive Eigenschaft X nicht haben. Wenn also ein Individuum die Eigenschaft X hätte, würde das gemäß (5) einen Widerspruch implizieren. Der letzte Gedanke wird in (6) weiterverfolgt.

⁴ Da die positive Eigenschaft Xx die Eigenschaft, nicht mit x identisch zu sein, nach diesem Argumentationsgang notwendig einschließt, kann man daraus nach Axiom 2 schließen, dass die Eigenschaft, nicht mit x identisch zu sein, ebenfalls eine positive Eigenschaft ist.

(11) und (14) widersprechen sich. Das bedeutet, dass die Annahme in (2) falsch ist. Damit gilt das Gegenteil, nämlich Satz 1. ■

Korrolar: Möglichkeitsnachweis

Korrolar 1 (Es ist möglich, dass mindestens ein Individuum existiert, das göttlich ist).

$$\diamond \exists x Gx.$$

Nach Axiom 3 ist Göttlichkeit eine positive Eigenschaft, daher:

Nr.	Ausdruck	Kommentar
15	$PG \rightarrow \diamond \exists x Gx$	Satz 1, X ersetzt durch G.
16	$\diamond \exists x Gx$	(15), Axiom 3, Modus Ponens. ■

Die Voraussetzungen, dass dieser Beweis geführt werden kann, sind der Rahmen der Prädikatenlogik zweiter Stufe, die Axiome 1-3 sowie die Annahme, dass „mit sich selbst identisch sein“ ein gültiges Prädikat ist.

2.3.3. Beweis: Göttlich-sein als wesentliche Eigenschaft

Satz 2 (Göttlich-sein ist eine wesentliche Eigenschaft eines Individuums).

$$Gx \rightarrow GEssx.$$

Der Kern des Beweises besteht darin, dass sich aufgrund der Definition, unter welchen Umständen ein Individuum x das Prädikat G zugewiesen werden darf, ergibt, dass alle Prädikate dieses Individuums positiv sein müssen. Hätte x ein Prädikat Y, das nicht positiv ist, folgt daraus aufgrund von Axiom 1, dass $\neg Y$ positiv sein muss. Es gilt aber laut Definition des Prädikats G (Definition 1, dass ein Individuum mit diesem Prädikat alle positiven Eigenschaften haben muss. Da $\neg Y$ aber nicht zu x gehört, folgt ein Widerspruch und die Annahme, dass x ein nicht-positives Prädikat Y hat, ist falsch.

Sobald also das Prädikat G gesetzt ist, folgen alle anderen Eigenschaften daraus. Es sind genau alle positiven Eigenschaften. Um die Notwendigkeit dieser Folge zu erhalten, wird der Satz des Modalen Prinzips verwendet (siehe unten). Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt, um G als eine wesentliche Eigenschaft aufgrund Definition 2 auszusagen.

2. Historie und Skizze seines Beweises

Nr.	Ausdruck	Kommentar
17	Gx	Angenommen, x hat die Eigenschaft „Göttlichsein“.
18	Yx	Angenommen, x hat eine weitere Eigenschaft Y.
19	$G \text{ Ess } x \Leftrightarrow Gx \wedge \forall Y(Yx \rightarrow \Box \forall y(Gy \rightarrow Yy))$	Definition 2, X ersetzt durch G. Es soll gezeigt werden, dass aus G mit Notwendigkeit Y folgt, damit G der Definition einer wesentlichen Eigenschaft entspricht.
20	$\neg PY$	Angenommen, Y ist keine positive Eigenschaft.
21	$\neg PX \rightarrow P\neg X$	Axiom 1.
22	$P\neg Y$	(21), X mit Y substituieren, Modus Ponens.
23	$Gx \Leftrightarrow \forall X(PX \leftarrow Xx)$	Definition 1
24a	$\forall X(PX \rightarrow Xx)$	(23),(17), Modus Ponens.
24b	$P\neg Y \rightarrow \neg Yx$	Da der Allquantor über alle Eigenschaften läuft, läuft er auch über die Eigenschaft $\neg Y$.
25	$\neg Yx$	(24),(22), Modus Ponens.
26	PY	Da (26) im Widerspruch zu (20) ist, folgt daraus, dass die Annahme (20) falsch ist und ihr Gegenteil gelten muss: Wenn ein Individuum die Eigenschaft G hat, dann ist jede andere beliebige Eigenschaft Y eine positive Eigenschaft. Denn man kann die Schritte (17)-(26) für jede beliebige Eigenschaft wiederholen.
27	$PY \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Yy)$	Folgt aus Definition 1. Wird Verständlich durch Anmerkung (26).
28	$PX \rightarrow \Box PX$	Axiom 4.
29	$\Box PY$	Axiom 4, X wird substituiert mit Y.
30	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$	Modales Prinzip: Schlussregel von normalen Modalsystemen.
31	$(PY \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Yy)) \rightarrow (\Box PY \rightarrow \Box \forall y(Gy \rightarrow Yy))$	(30), Linke und Rechte entsprechend (27) substituiert.
32	$\Box PY \rightarrow \Box \forall y(Gy \rightarrow Yy)$	(31), (27), Modus Ponens.
33	$\Box \forall y(Gy \rightarrow Yy)$	(32), (29), Modus Ponens.
34	$G \text{ Ess } x$	Alle von (19) geforderten Terme sind hergeleitet, die Äquivalenz kann ausgesagt werden. ■

Um diesen Satz herzuleiten, braucht man also Definition 1 (Prädikat G), Definition 2 (wesentliche Eigenschaft), Axiom 1, Axiom 4 und (30) - das modale Prinzip.

Korrolar: Zwei göttliche Individuen sind notwendigerweise identisch

Korrolar 2 (Wenn zwei Individuen göttlich sind, dann sind sie notwendigerweise identisch³⁸).

$$Gx \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow x = y).$$

Nr.	Ausdruck	Kommentar
35	$G \text{ Ess } x \Leftrightarrow Gx \wedge \forall Y (Yx \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow Yy))$	(19)
36	$\forall Y (Yx \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow Yy))$	In (35) wird Satz 2 eingesetzt. Daraus folgt Gx und der zweite Teil der Konjunktion.
37	$(x = x \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow (x = y)))$	Eine Instanz aus allen Eigenschaften ist die Eigenschaft $(x = _)$, mit x identisch zu sein.
38	$Gx \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow (x = y))$	Da (37) von Satz 2 abhängt und dieser von Gx . ■

2.3.4. Beweis des Anselmschen Prinzips

Satz 3 (Anselms Prinzip: Wenn die Existenz eines Individuums, das göttlich ist, möglich ist, dann ist sie notwendig).

$$\Diamond \exists Gx \rightarrow \Box \exists x Gx.$$

Nun geht es zum Herzstück des ontologischen Gottesbeweises, das als Anselm'sches Prinzip oder modales Argument (siehe Abschnitt 2.2.2) bezeichnet wird. Zunächst zeigt man, dass aus der Existenz von Gx die notwendige Existenz von Gx folgt, um dann mit dem Becker-Axiom (Axiom 6) von der möglichen Existenz auf die notwendige Existenz zu schließen.

³⁸Das heißt: Wenn es einen „Gott“ gibt, gibt es nur einen „Gott“

2. Historie und Skizze seines Beweises

Nr.	Ausdruck	Kommentar
39	$\exists xGx$	Angenommen, ein Individuum mit der Eigenschaft G existiert.
40	Gy	Dieses Individuum sei y.
41	$Gy \Leftrightarrow \forall X(PX \rightarrow Xy)$	Definition 1; x substituiert mit y.
42	$\forall X(PX \rightarrow Xy)$	(41), Modus Ponens mit (40). y muss alle positiven Eigenschaften haben.
43	$PE \rightarrow Ey$	Instanziierung mit E (notwendige Existenz).
44	PE	Axiom 5. Notwendige Existenz ist eine positive Eigenschaft, also...
45	Ey	... hat y die Eigenschaft der notwendigen Existenz. (43), Modus Ponens mit (44). Das bedeutet laut Definition:
46	$Ey \Leftrightarrow \forall X(XEssy \rightarrow \Box\exists xXx)$	Definition 3, x substituiert mit y, y substituiert mit x. Notwendige Existenz bedeutet, dass alle wesentlichen Eigenschaften notwendig instanziiert sind.
47	$\forall X(XEssy \rightarrow \Box\exists xXx)$	(46), Modus Ponens mit (45).
48	$Gy \rightarrow GEssy$	Satz 2, x substituiert mit y.
49	$GEssy$	(48), Modus Ponens mit der Annahme (39). G ist eine wesentliche Eigenschaft von y.
50	$GEssy \rightarrow \Box\exists xGx$	Instanziierung von (47) mit (49). Wenn alle wesentlichen Eigenschaften notwendig instanziiert sind, ...
51	$\Box\exists xGx$... muss auch G notwendig instanziiert sein. (50), Modus Ponens mit (49).
52	$\exists xGx \rightarrow \Box\exists xGx$	Zusammenfassung des Beweisgangs von (39) bis (51).
53	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$	Eine in 'normalen' Modalsystemen zu (30) äquivalente Schlussregel.
54	$(\exists xGx \rightarrow \Box\exists xGx) \rightarrow (\Diamond\exists xGx \rightarrow \Diamond\Box\exists xGx)$	$(A \rightarrow B)$ substituiert mit (52).
55	$\Diamond\exists xGx \rightarrow \Diamond\Box\exists xGx$	(54), Modus Ponens mit (52).
56	$\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$	Axiom 6 (Becker-Axiom). Dadurch wird ein starker Notwendigkeitsbegriff festgelegt, was umstritten ist.
57	$\Diamond\Box\exists xGx \rightarrow \Box\exists xGx$	(56), A substituiert mit (39)
58	$\Diamond\exists xGx \rightarrow \Diamond\Box\exists xGx \rightarrow \Box\exists xGx$	Aneinanderreihung von (55) und (57).
59	$\Diamond\exists xGx \rightarrow \Box\exists xGx$	(58), folgt aufgrund der Transitivität. ■

Für den Beweis von Satz 3 waren Satz 2, Axiom 5, die modale Schlussregel sowie das umstrittene Axiom 6 (Becker-Axiom) nötig. Das Endresultat ist mit dem folgendem Korrolar erreicht:

Korrolar: Die notwendige Existenz genau eines Gottes

Korrolar 3 (Es ist notwendig, dass mindestens ein Individuum x existiert, das göttlich ist und wenn es mehrere sind, dann sind sie mit x identisch³⁹).

$$\Box \exists x (Gx \wedge \forall y (Gy \rightarrow x = y)).$$

Dieser Satz ist eine Zusammenfassung der bisher erzielten Resultate, das heißt: Der Möglichkeitsnachweis (Korrolar zu Satz 1) und das modale Argument (Satz 3) ergeben einen Gottesbeweis, der im Rahmen des axiomatischen Systems gültig ist.⁴⁰

Nr.	Ausdruck	Kommentar
60	$\Diamond \exists x Gx$	Korrolar zu Satz 1.
61	$\Diamond \exists x Gx \rightarrow \Box \exists x Gx$	Satz 3.
62	$\Box \exists x Gx$	(60), Modus Ponens mit (61).
63	$Gx \rightarrow \Box \forall y (Gy \rightarrow x = y)$	Korrolar zu Satz 2.
64	$\Box \forall y (Gy \rightarrow x = y)$	(63), Modus Ponens mit Instanz von (62).
65	$\Box \exists (Gx \wedge \forall y (gy \rightarrow x = y))$	Zusammenziehen von (60)-(64). ■

2.4. Zur Klassifikation von Gottesbeweisen

Gödel selbst titulierte in den Notizen seinen Gottesbeweis mit „Ontologischer Beweis“.⁴¹ In (Ricken 1998, S.7-13) findet sich allerdings eine Bemerkung, nach der Gödels Beweis eher zum sogenannten vierten Weg nach der Einteilung Thomas von Aquins passen soll, wenn man genauer zusieht. Dem Argument wird nicht nachgegangen. Vielmehr werden die fünf Wege Thomas' dargestellt, um daran anschließend Thomas' Abgrenzung zum ontologischen Argument zu skizzieren.

Thomas von Aquin nennt in der Summa Theologia⁴² fünf Wege die zum Ziel, das Dasein Gottes zu beweisen, führen sollen. Im Folgenden werden sie grob skizziert⁴³:

1. Der Beweis aus der Bewegung:

Wir nehmen wahr: In dieser Welt wird etwas bewegt.

Alles, was bewegt wird, wird von einem Anderen bewegt.

Die Reihe der Bewegenden lässt sich nicht bis ins Unendliche fortsetzen.

³⁹Es gibt notwendigerweise nur einen „Gott“.

⁴⁰Die formale Gültigkeit müsste im Detail gezeigt werden. In dieser Arbeit muss dafür ein Verweis auf Essler (1998) und Fuhrmann (2005) genügen.

⁴¹Vgl. (Gödel und Feferman 1995, S.429-437).

⁴²Vgl. (Thomas von Aquin 1982, S.39-S.59), das ist S.th. I 2.3.

⁴³Die Explikation folgt (Essler 1998, S.8ff).

Konklusion: Es gibt ein erstes Bewegendes, das von keinem anderen bewegt wird.

2. **Der Beweis aus der Wirkursache:**

Wir finden in dieser Welt Ursache-Wirkungs-Beziehungen vor.

Keine Wirkung kann sich selbst als Ursache haben.

Die Reihe der Ursachen lässt sich nicht bis ins Unendliche fortsetzen.

Konklusion: Es muss eine erste Ursache geben, aus der die Wirkungen hervorgehen.

3. **Der Beweis aus Möglichkeit und Notwendigkeit:**

Wir erfahren, dass etwas, was in einem Moment ist, in einem anderen Moment nicht mehr ist.

Wenn alles, was es gibt, genauso gut nicht sein kann, dann könnte auch überhaupt nichts sein.

Folglich wäre aber auch jetzt nichts.

Daher muss es notwendig Seiendes geben.

Die Notwendigkeit des Seienden kommt entweder von einem anderen Seienden oder von sich selbst.

Die Reihe der Seienden, die die Notwendigkeit von einem anderen hat, kann nicht bis ins Unendliche fortgesetzt werden.

Konklusion: Es gibt Seiendes, das aus sich selbst heraus notwendig ist.

4. **Der Beweis aus den Graden der Vollkommenheit:**

Wir sehen: Positive Bestimmungen kommen den Dingen in unterschiedlichen Graden zu.

Das bedeutet, die Dinge nähern sich in unterschiedlichem Maße an ein Seiendes an, in dem die positiven Bestimmungen vollkommen verwirklicht sind.

Die höchste Verwirklichung ist die Ursache der anderen unvollkommenen Verwirklichungen.

Konklusion: Es existiert etwas, das für alle Dinge die Ursache des Vollkommenen und Guten ist.

5. **Der Beweis aus der Teleologie:**

Wir beobachten: Alle Seiende ohne Erkenntnis sind auf ein Ziel hin ausgerichtet (programmiert).

Das bedeutet: Es muss etwas geben, das sie auf ihr Ziel hin ausrichtet (programmiert).

Man kann 4 gemeinsame Merkmale identifizieren. Die obigen fünf Wege sind...

- **aposteriorische Beweise:** Die Prämissen beschreiben Erfahrungstatsachen, die von Thomas als die für uns bekannten Wirkungen Gottes aufgefasst werden.

- **deduktive Beweise:** Wenn gesetzt ist, dass die Prämissen wahr sind, folgt daraus mit Notwendigkeit, dass auch die Konklusion wahr ist. Sprich: Die Konklusion lässt sich aus der Prämisse deduzieren.
- **Erklärungen für die jeweiligen Prämissen:** Die Konklusionen geben eine notwendige Bedingung an, um die Prämissen zu erklären, die unsere Erfahrungstatsachen beschreiben.
- **Dass-Beweise:** Wir können durch diese Beweise *nur* die Notwendigkeit der Existenz Gottes erkennen, nicht aber eine vollkommene Bestimmung von Gott liefern. Unser Erkenntnisvermögen ist nach Thomas von Aquin also unzureichend, um Gott vollständig in allen seinen Eigenschaften zu erkennen.

2.4.1. Abgrenzung zu Gottesbeweisen a priori

Thomas argumentiert, dass nur von für uns erkennbare Wirkungen ausgehend, eine Beweisbarkeit Gottes möglich ist.⁴⁴ Das führt in eine Kritik an dem ontologischen Gottesbeweis Anselms (und welchen, die ähnlich argumentieren), der davon ausgeht, dass Gottes Dasein an sich bekannt ist. Nämlich so: Gottes Namen kann man erläutern als das Ding, „womit verglichen nichts Größeres gedacht werden kann“. Wenn dieses Ding jedoch nicht Seiend ist, wäre es nicht das Größte, denn was existiert, denkt man sich als Größer. Aus dieser Überlegung heraus, ist die Existenz Gottes bereits in dieser Wesensbestimmung mit eingeschlossen. Thomas' Kritik basiert kurz gesagt auf der aristotelischen Unterscheidung zwischen **an sich und nicht in Bezug auf uns bekannt** und **an sich und in Bezug auf uns bekannt**. **in Bezug auf uns bekannt** bedeutet, dass die Begriffe allgemein bekannt sind, während **an sich bekannt** bedeutet, dass Wissenschaftler, die sich damit beschäftigen, diesen Begriff einsehen können. Es ist möglich, dass Anselms Wesensbestimmung für uns nicht bekannt ist, da sie aus einer langen Beschäftigung mit theologischen Themen resultiert, die nicht von Geburt an klar sind.⁴⁵ Und selbst wenn uns Anselms Wesensbestimmung klar wäre, muss das noch nicht bedeuten, dass wir daraus schließen, dass Gott real existiert: „Selbst aber zugegeben, es verstünde jeder, daß mit dem Namen Gott das Gesagte bezeichnet werde, nämlich das, womit verglichen nichts Größeres gedacht werden kann, so folgt dadurch dennoch nicht, er verstünde auch, daß das, was mit dem Namen bezeichnet wird, in Realität sei[...], sondern nur in der Erfassung der Vernunft.“⁴⁶

⁴⁴ „Da nämlich eine Wirkung augenfälliger ist als ihre Ursache, schreiten wir von der Wirkung zur Erkenntnis ihrer Ursache fort. Aus jeder beliebigen Wirkung aber kann bewiesen werden, daß die ihr eigentümliche Ursache ist (existiert)[...] Daß also Gott ist, läßt sich, sofern dies für uns nicht an sich bekannt ist, beweisen aus den uns bekannten Wirkungen.“ (Thomas von Aquin 1982, S.49 (S.th. I 2.2))

⁴⁵ „Aber weil wir von Gott nicht wissen, was er ist, ist für uns die Aussage nicht an sich bekannt, sondern sie bedarf eines Beweises durch das, was bekannter für uns und weniger bekannt in bezug auf die Natur (Gottes) ist, nämlich durch die Wirkungen (Gottes).“ (Thomas von Aquin 1982, S.45) (S.th. I 2.1)

⁴⁶ (Thomas von Aquin 1982, S.47) (S.th. I 2.1)

A. Originalbeweise

In ([Gödel und Feferman 1995](#), S.429-437) finden sich zwei relativ kurze Beweise, die in Gödels Nachlass gefunden wurden. Sie werden im Folgenden für weitergehende Analysen aufgeschrieben und teilweise kommentiert.

A.1. Der Originalbeweis - Erste Notiz: „Ontological Proof ca. 1941“

ID	Ausdruck	Kommentar
A	$\Phi(\varphi) \equiv N(\exists x)\varphi(x)$	Es handelt sich um die Definition eines Prädikats zweiter Stufe (Φ). φ ist das Prädikat erster Stufe, auf das Φ angewendet wird. N ist der Modaloperator \Box . Formal wird hier festgelegt, dass das Prädikat zweiter Stufe Φ nur dann auf die Eigenschaft φ zutrifft, wenn es notwendig ist, dass ein Individuum x existiert, das diese Eigenschaft hat. Man kann diese Zeile vielleicht als Definition eines Hilfsprädikats für die nächste Zeile ansehen; Φ bedeutet 'Ist notwendig instanziiert' in Bezug auf ein Prädikat der Stufe 1. $\Phi\varphi \Leftrightarrow \Box\exists x\varphi x$
B	$A(x) \equiv (\exists x)[(x)[\varphi(x) \equiv_N A(x)].\Phi(\varphi)]$	Definition von Prädikat A . Bei dieser Formel ist offenbar ein Fehler (entweder bei der Transkription oder von Gödel) vorhanden: Es ist nicht klar, auf welchen Bereich der Existenzquantor bindet. Für weitergehende Recherchen müsste man sich den Nachlass selbst ansehen.
C	$G(x).\varphi\epsilon+ \rightarrow \varphi(x)$	Wenn x Göttlich ist und φ eine Positive Eigenschaft ist, dann hat x diese Eigenschaft. Anders formuliert: Das göttliche Individuum hat alle positiven Eigenschaften. (vgl. Definition 1).
D	$(\exists x)G(x) \rightarrow N(\exists x)G(x)$	Anselms Prinzip, jedoch wird nicht von der Möglichkeit der Existenz, sondern von der Existenz ausgegangen, um auf die Notwendigkeit der Existenz zu schließen.
E	$G = \hat{x}[(\varphi)\varphi\epsilon+ \rightarrow \varphi(x)]$	\hat{x} bedeutet 'die Menge aller Individuen, die die nachfolgende Eigenschaft erfüllen.' Das Prädikat G definiert also die Menge aller Individuen, bei denen alle positiven Eigenschaften instanziiert sind, während $G(x)$ die Eigenschaft eines Individuums, göttlich zu sein, meint.
F	$\psi\epsilon+ \rightarrow \psi(G)$	Instanzierung: Wenn irgend eine Eigenschaft positiv ist, dann ist sie eine Eigenschaft der göttlichen Individuen.

A.2. Der Originalbeweis - Zweite Notiz: „Ontologischer Beweis $G(x) =_{Df} x$ “

ID	Ausdruck	Gödel-Kommentar	Kommentar
G	$NE(x) \equiv_{Df} N(\exists y)Ess_x(y)$	notwendige Existenz	
H	$G(x) \supset NE(x)$	da NE eine pos. Eigenschaft ist	
I	$G(x) \supset .Ess_x \supset G^\otimes$	(gilt für jede Eigenschaft statt G)	Essenz ist in der Fußnote [⊗] von Gödel definiert Das Prädikat der Essenz ist mit der Definition 2 von wesentliche Eigenschaften äquivalent.
J	$G(x) \supset N(\exists y)G(y)$	folgt aus den 3 vorhergehenden)	
K	$(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$		
L	$M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$	(beiderseitige Hinzufügung von M)	M ist der Modaloperator \diamond .
M	daher $\supset N(\exists y)G(y)$		Hier wird das Becker-Axiom (vgl. 6) verwendet, um von $\diamond\Box$ auf \Box zu schließen.

Zusätzlicher Vermerk von Gödel: „Ebenso folgt: Wenn der Begriff notwendige Existenz widerspruchsfrei ist, so gibt es Dinge, für die er gilt.“

Fußnote von Gödel: „[⊗] Dazu braucht man, das alle Eigenschaften Gottes durch eine Eigenschaft 2-ten Typs definiert sind. [Das musste überhaupt die Df. der Essenz sein.] Oder Ess_x definiert durch: $\varphi \in Ess_x \equiv (\psi)\psi(x) \supset N(x)[\varphi(x) \supset \psi(x)].\varphi(x)$.“

B. Literaturverzeichnis

- Anselm von Canterbury 1962** ANSELM VON CANTERBURY ; SCHMITT, Franciscus S. (Hrsg.): *Proslogion / Untersuchungen*. Stuttgart-Bad Cannstatt : Frommann, 1962
- Dawson 1997** DAWSON, John W.: *Kurt Gödel. Leben und Werk*. Wien - New York : Springer, 1997
- Essler 1998** ESSLER, Wilhelm K.: Gödels Beweis. In: RICKEN, Friedo (Hrsg.): *Klassische Gottesbeweise in der Sicht der gegenwärtigen Logik und Wissenschaftstheorie*. 2. erw. Stuttgart : Kohlhammer, 1998 (Probleme der Philosophie), S. 167–179
- Fuhrmann 2005** FUHRMANN, Andre: Existenz und Notwendigkeit - Kurt Gödels axiomatische Theologie. In: SPOHN, W. (Hrsg.) ; SCHROEDER-HEISTER, P. (Hrsg.) ; OLSSON, E. (Hrsg.): *Logik in der Philosophie* Bd. 6. Synchron, 2005, S. 349–374
- Gödel und Feferman 1995** GÖDEL, Kurt ; FEFERMAN, Solomon: *Collected works. Volume III. Unpublished essays and lectures*. New York - Oxford : Oxford University Press, 1995
- Leibniz 1961** LEIBNIZ, Gottfried W.: *Neue Abhandlungen über den menschlichen Verstand. Zweiter Band*. Frankfurt : Insel, 1961
- Leibniz 1995** LEIBNIZ, Gottfried W. ; HERRING, Herbert (Hrsg.): *Fünf Schriften zur Logik und Metaphysik*. Stuttgart : Reclam, 1995 (Universal-Bibliothek 1898)
- Leibniz 1998** LEIBNIZ, Gottfried W.: *Monadologie. Französisch–Deutsch*. Stuttgart : Reclam, 1998
- Ricken 1998** RICKEN, Friedo: Einführung. In: RICKEN, Friedo (Hrsg.): *Klassische Gottesbeweise in der Sicht der gegenwärtigen Logik und Wissenschaftstheorie*. 2. erw. Stuttgart : Kohlhammer, 1998 (Probleme der Philosophie), S. 7–15
- Samuelson 2007** SAMUELSON, Norbert: Gottesbeweise III. In: MÜLLER, Gerhard (Hrsg.): *Theologische Realenzyklopädie* Bd. 13. Berlin New York : Walter de Gruyter, 2007, S. 724–770
- Thomas von Aquin 1982** THOMAS VON AQUIN ; SEIDL, Horst (Hrsg.): *Die Gottesbeweise in der „Summe gegen die Heiden“ und der „Summe der Theologie“*. Hamburg : Meiner, 1982 (Philosophische Bibliothek Bd. 330)